TOP 07

QU'EST-CE QUE $\sqrt{2}$!.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 07 (Intégration).

Exercice 1.-
On appelle fonction Γ la fonction définie par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. En déduire la valeur de la fonction Γ sur les entiers.

4. D'après ce qui précède, comment proposeriez-vous de définir $(\sqrt{2})!$ ou encore $\pi!$?

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.- **1.** On pose $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$. Il s'agit donc de voir que l'intégrale de f est convergente pour chaque $x > 0$. L'intégrale est toujours impropre en $+\infty$, il faudra donc étudier son intégrabilité. Elle est aussi impropre en 0 lorsque $x < 1$. En effet, lorsque $x \geqslant 1$, la fonction f est prolongeable par continuité en $t = 0$ en lui attribuant la valeur 0 car

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

D'autre part, lorsque $x < 1$, on trouve un équivalent de la fonction à intégrer en 0 :

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$$

et la fonction $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 (c'est une intégrale de Riemann de référence).

Ainsi la fonction $t \mapsto f(t)$ est toujours intégrable en 0.

À l'infini, on utilise la "méthode du t^2" :

$$t^2 f(t) = t^2 e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on constate que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, pour en conclure que f est aussi intégrable en $+\infty$ par comparaison.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

2. On procède par intégration par parties. On rappelle que la formule d'intégration par parties ne marche que pour des intégrales définies. Il faut donc prendre soin de revenir à la définition des intégrales impropres comme limites d'intégrales définies.

$$\Gamma(x+1) = \lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A e^{-t}t^x dt$$

puis on dérive la fonction $t \mapsto t^x$ et on intègre la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[-e^{-t}t^x\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A xt^{x-1}e^{-t}dt\right)\\ &= \lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-e^{-A}A^x + e^{-\varepsilon}\varepsilon^x\right) + \lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A xt^{x-1}e^{-t}dt\end{aligned}$$

Ici, on a pu prendre la somme des deux limites car chacun des deux termes converge :

$$\lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-e^{-A}A^x + e^{-\varepsilon}\varepsilon^x\right) = 0$$

et

$$\lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A xt^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$$

On obtient bien

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. À l'aide de la formule précédente, on prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Pour $n = 1$, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

En effet, pour calculer cette limite, on peut soit faire un calcul direct (on connaît une primitive de $t \mapsto e^{-t}$, soit se souvenir que $t \mapsto e^{-t}$ est la densité de la loi exponentielle de paramètre 1 et que l'intégrale d'une densité de proba est toujours 1. La propriété à démontrer est donc initialisée.

Pour l'hérédité, supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour un certain entier n. Puis donc, d'après la question précédente

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\cdot(n-1)! = n!.$$

4. Ainsi la fonction Γ coïncide avec la fonction factorielle sur les entiers positifs (car $n! = \Gamma(n+1)$) mais elle est définie sur tous les nombres réels positifs. On peut donc se servir de la fonction Γ pour prolonger la définition de la fonction factorielle à tous les réels positifs. Ainsi, par exemple

$$\sqrt{2}! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\sqrt{2}}dt$$

ou encore

$$\pi! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\pi}dt$$